平面社会的数学模型

余 璆
上海工程技术大学

摘要：文章利用平面图 4 色着色的规则和平面图欧拉公式，把 4 种颜色对应于 4 种能量；4 种颜色的整体颜色数对应社会价值数，每个顶点看作为是一个个体。以此建立了一个平面社会的数学模型；并且以平面图内任何一条边两端的顶点的颜色不发生同色的冲突，对应于平面和谐社会。围绕这些内容和要求给出实现和谐社会的规则和方法，同时也证明了这样的方法符合数学归纳法的要求，也就是一个在全平面内自洽的和谐社会。

关键词：三角剖分图，最小不动构形，异同分解法，能量分配方法，平面图的折叠方法

1. 引言

设定平面上每个顶点表示一个个体，两个顶点之间的关系和约束用一条边来表示，其约束是规定边的两端不能有同样类型的能量。整体形成了一个由顶点和边来表示的平面图。用图论的知识建立一个数学模型。

每个顶点被赋予四种颜色：红色 1，蓝色 2，绿色 3，紫色 4 表示四种不同的单位自由能量。顶点是能量源，边是耗能源，边的耗能是由顶点让渡的。

这样的数学模型就使得的平面图 4 色着色的关系和规则变为四种不同能量的配置；和平面图 4 色着色数和能量产生的价值数建立了相同的对应关系。

1.1平面三角剖分图和能量关系

也就是再加一条边就是非平面图，如图 1.1（a）所示是平面图，而图 1.1（b）就是非平面图。这样的图是全部由 3 圈组成的集合，所以称为平面三角剖分图。

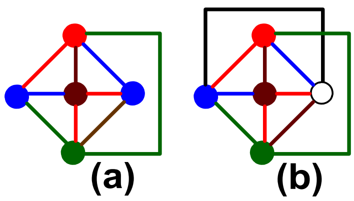

图 1.1 平面三角剖分图

平面三角剖分图，每个面有 3 条边，面数用 f 表示，边数用 e 表示，每条边共享两个面，顶点数用 v 表示。所以有 2e=3f，又因为有平面图必须满足的欧拉公式 [1,2]：

$$v-e+f=2 \qquad (1.1)$$

把 2e=3f 代入上式，有 v-e+(2/3)e=2，得到：

$$e=3v-6 \qquad (1.2)$$

这里设每个顶点有 4 种不同的单位自由能量，最多只能让渡出 3 个自由能量，每条边消耗 1 个能量，6 为平面闭环系统必须保证的最少能量，这就是平面社会的自然法则,包括边的两端不能有相同能量的冲突，这样就组成了一个平面和谐社会。由于在顶点数不变的情况下，边能少不能多，所以有：

$$e\leqslant 3v-6 \qquad (1.3)$$

也可以写成如下的形式：

$$(3v-6)-e\geqslant 0 \qquad (1.4)$$

注意：这是一个整体和任何局部都必须满足的要求。

图 1.1（a）的 v=5，e=9，那么有：

$$e=9\leqslant 3v-6=3x5-6=9 \quad (1.5)$$

它是平面图，也满足对能量的要求。而图 1.1（b）的 e=10，v=5 不变。显然是不满足的，它是非平面图。

2. 给定图的价值数的计算

2.1 计算的例子

社会价值如何产生和计算的：图 2.1（a）是去掉一条边的 3 圈，第一个顶点可以有 4 种单位自由能量，对应 4 种能够产生的交换价值，第二个顶点，由于第一个顶点的约束，只有 3 种交换价值，第三个顶点也是有 3 种交换价值，所以有（相当于图论中的四色颜色数）。

$$P_{31}=4x3x3=36 \quad (2.1)$$

同样的分析可以得到：

$$P_{32}=4x3x2=24 \quad (2.2)$$

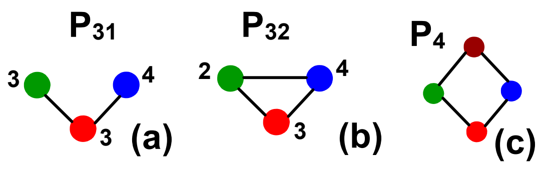

图 2.1 社会价值数的计算

那么图 2.1（c）的社会价值数如何计算呢？下面将介绍。

2.2 异同分解方法

如图 2.2（a）所示，对于去掉一条边的 4 圈，缺口处对应的两个顶点分为两种可能的情况，相同和不相同。不相同时相当于一个 4 圈（两个顶点之间等效为有一条边），相同时就相当于一个 3 圈（两个顶点等效为合并）。这样，把 3 圈和 4 圈加起来，它们的颜色数就相当于去掉一条边的 4 圈。通过移项也可以认为 4 圈的颜色数就是去掉一条边的 4 圈减去一个 3 圈，如图 2.2（b）所示，本文把这种分解称为“异同分解方法”。它是 1912 年由美国数学家 George David Birkhoff 首先引入的[1,2,3]。

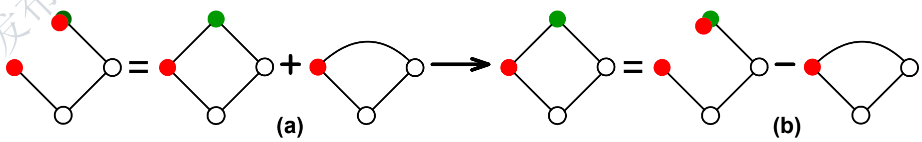

图 2.2 去掉一条边的 4 圈等价于一个 4 圈和 3 圈的相加

结论：平面图的两个顶点之间的关系可以进行等效变换，由一种关系变为两种关系的加减运算，变换遵循的要求是分解前后总的价值数（着色数）不变。

2.2 引入分解的最小构形

如图 2.3（a）的外部为一棵树的平面图，图 2.3（b）和（c）是一棵树加上一个 3 圈，和 4 圈的平面图。

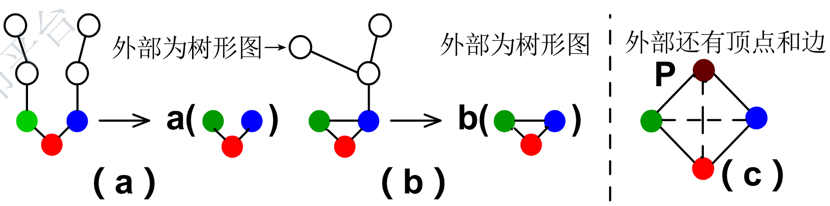

图 2.3 三种最小构形图

2.3 最小不动构形的价值计算

规定图 2.4 中的实心顶点和相互连接的边为最小不动构形(其中不动顶点之间相互不合并)。对其它的顶点和与之相关联的边进行去圈的分解，分解一直持续进行下去，直到最后形成如图 2.3 (a), (b),的两种外部为树形结构的图为止。这时把左右两个顶点之间没有边的归为一类，称为 A 项，用 P(a)表示，a 为 A 项的系数,（**注意**：这时 A 项左右两个顶点为非约束状态，也就是它们可以同色，也可以异色，称为“**自由顶点对**”，改变它们之间的颜色异同，不影响其参数 a 。把两个顶点之间有边的归为另一类,称为 B 项，用 P(b)表示，b 为 B 项的系数，这时左右两个顶点处于约束状态，相当于一条不可避免的 2 色异色颜色链路，或就是一条边。当 A 项的两个顶点同色时，B 项为零，所以左右这两个顶点称为“**约束顶点对**”。

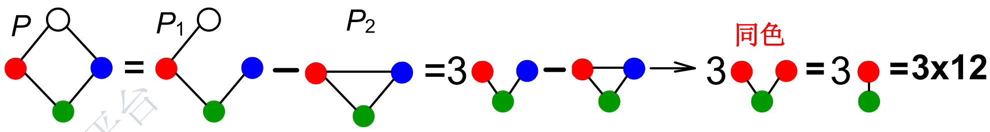

图 2.4 一个 4 圈图的分解

由图 2.4 得到的价值数（四色颜色数）为:

$$P=[36\times 3]_A-[24\times 1]_B=[36a]_A-[24(b)]_B=P(a)-P(b)=108-24=84 \quad (2.1)$$

其中 a=3, b=-1，为不动构形以外，树形结构的顶点的颜色数的总和（如果有多项，可以合并同类项）。**注意**：这里研究的对象是闭环系统，也就是每个顶点都处于一个环上，或称圈上，不考虑有树叶的图。图 2.5 是一个 5 圈的分解：

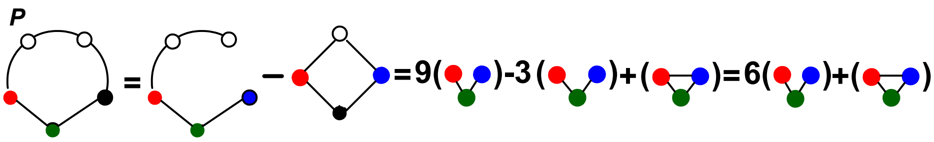

图 2.5 一个 5 圈的分解

得到的价值函数和价值数为:

$$P=[36\times 6]_A+[24\times 1]_B=[36a]_A+[24b]_B=36\times 6+24=240 \quad （2.2）$$

其中：a=6, b=1。约束项有正负，和整个体系的奇偶特性有关。（**注：这方面的论述在我的其它文章中有**）[6]

3. 分析和谐社会能量颜色的分配方法

3.1 引入 T 图

假设存在一个平面三角剖分图 T，任何顶点数比图 T 少的平面图皆为四色的，而 T 图不是。那么在 T 图中去除一个顶点和关联的边，得到四色 T-v 图，接下来证明这个顶点和与之关联的边是否可以加，加了以后价值数是否不会发生颜色冲突，也就是颜色数还是大于零（对应于平面图 4 色着色数是否大于零）。

3.2 简化（T-v）图

把（T-v）图画成如下的图 3.1（a）的形式，这是一个 4 部图。图中每一条虚线表示可以有多条边（为了作图的方便），（由于少一路就可以是 3 色能量图，分析更简单，所以不用考

虑）。圈中的$\sum V^x$ 表示同色顶点的集合，它们之间没有边，但是可以合并，由于顶点和边的关系和它们的数量都没有改变，所以仍然满足:

价值数：(T-v)>0 ，和 e≤3v-6 的条件　(3.1)

把同色顶点全部合并，全部的重边合并，得到图 3.1（b)。这样的等效变换可能使得总价值数（即颜色数）减少，但是 4 种颜色作为整体的最小交换价值数仍然保留,可以认为数据被压缩了。所以这仍然是一种价值数大于零的方案，或说不发生颜色冲突的方案，既得到压缩图$(T\text{-}v)_{comp}$，图中：e=6,v=4, 那么：e≤3v-6 的条件仍然满足。这样的图其价值数为 24，保留了最少价值数（也就是最小的 4 色图）。

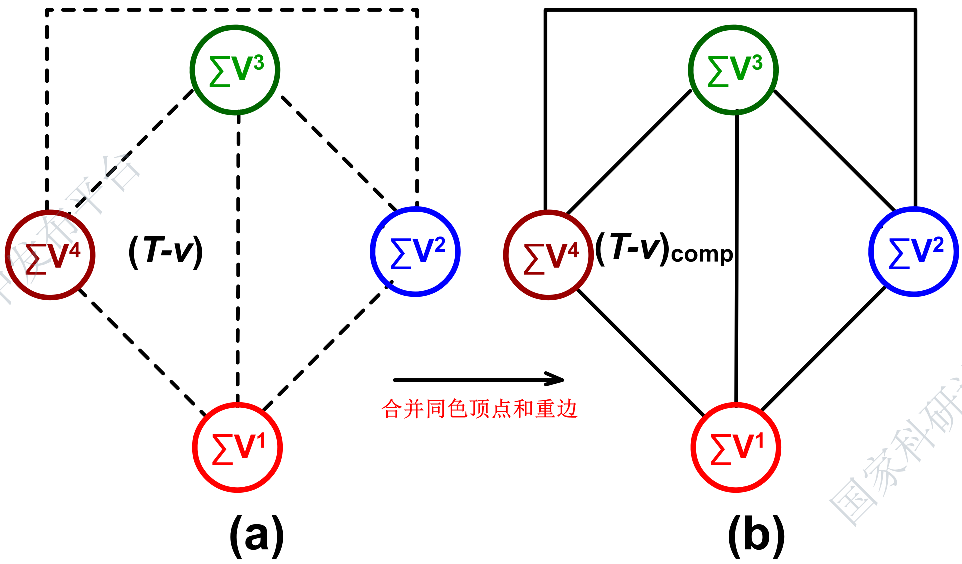

图 3.1 等效变换为 4 部图

接下来看压缩图 T_{comp} 图就非常清晰了：在平面图中的任何地方加一个顶点和与（T-v）$_{comp}$ 图关联的边，最多只能增加 3 条（**可以有重边.实际上也只能在重边里**），所以加了这个顶点，仍然可以满足平面内 4 色的要求，也就是满足和谐社会的要求。如图 3.2 所示：

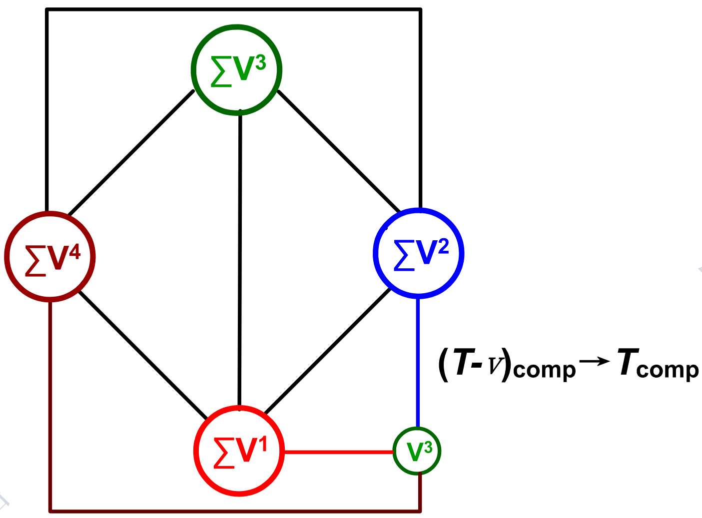

图 3.2 边可以加的解释图

这也始终满足了平面图的公式：e≤3v-6 的要求，既：

$$e+3\leq 3(v+1)-6 \quad \rightarrow \quad e\leq 3v-6 \quad (3.2)$$

反证：假设平面内新增加的顶点有多于 3 条的关联边（不包括重边），而（T-v）comp 可以逆向恢复为平面图（T-v），这样就会发生 e>3v-6 的结果，成为非平面图，产生矛盾的结果，所以只能是 3 条边，其余的就是重边。

总结：

1. 边的存在除了是一种联系，也具有控制和耗能的效果，边的增加必然导致社会价值的减少，自由度的减少，但是增加了信息的流通。边的增加超过限度，破坏了平面的自然法则，价值将会趋于零，社会就会停摆，也就不是一个和谐社会了。

2. 大自然给出自然法则的同时，也隐含的告诉你。一定有最好的，遵守法则的方案去建立和谐社会。

3. 可以有进一步的论述，但是是否有？要看效果。

参考文献

[1] 王树禾. 图论. 北京：科学出版社，2004.1

[2] Douglas B. West. Introduction to Graph Theory, Second Edition. Pearson Education, Inc, publishing as Prentice Hall. 2006

[3] Douglas B. West.李建中译. 图论导引. 第二版. 北京：机械工业出版社，2006.2: 206

[4] 孙惠泉. 图论及其应用. 北京；科学出版社，2004.9：126~129

[5] 徐君明. 图论及其应用. 合肥：中国科学技术大学出版社，2010.3:105,230

[6] http://www.paper.edu.cn/releasepaper/content/202306-8

Mathematical model of plane society

Yu Qiu

Shanghai University of Engineering Science

Abstract: This paper uses the rules of 4-color coloring of the floor plan and the Euler's formula of the floor plan to correspond to the four kinds of energy; the overall color number of the four colors corresponds to the number of social values, so as to establish a mathematical model of a flat society; and how to make the 4-color coloring of the floor plan do not conflict, corresponding to how to establish a flat harmonious society. The rules and methods for achieving a harmonious society are given around these contents and requirements, and it is also proved that such methods meet the requirements of mathematical induction, that is, a harmonious society that can be self-consistent in the whole plane.

Keywords: triangulation diagram, minimum immovable configuration, similarity and difference decomposition method, energy distribution method.